

**NOTES (INCOMPLÈTES) DU MINI-COURS  
LIMITES PROBABILISTES POUR DES SYSTÈMES DYNAMIQUES  
CHAOTIQUES  
PREMIÈRES RENCONTRES DE L'AXE AMA DU RÉSEAU THÉMATIQUE  
ANAI (CNRS RT2169)**

FRANÇOISE PÈNE, UNIV BREST, UNIVERSITÉ DE BREST,  
LMBA, UMR CNRS 6205, FRANCE

RÉSUMÉ. Nous allons voir comment des méthodes d'analyse permettent de montrer des théorèmes limites probabilistes dans des systèmes déterministes au comportement chaotique.

1. MARCHES ALÉATOIRES

Soit  $(X_k)_k$  une suite de variables aléatoires à valeurs réelles définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On suppose que ces variables sont indépendantes et de même loi. On s'intéresse au comportement asymptotique des sommes  $(S_n := \sum_{k=1}^n X_k)_{n \geq 1}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

1.1. **LFGN**. Le premier théorème limite probabiliste pour ces sommes est

- la **loi forte des grands nombres (LFGN)** qui assure que si les  $X_i$  sont intégrables (ou positives) alors

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \mathbb{E}[X_1] \right) = \mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) = \mathbb{E}[X_1] \right\} \right) = 1,$$

autrement dit la suite des moyennes converge presque sûrement vers l'espérance.

Ce théorème est très important en probabilité. Quand on enseigne les probabilités, on explique souvent que l'espérance est une "moyenne théorique", ce résultat dit que l'espérance est la limite des moyennes, et apporte un point de vue très concret à la notion d'espérance, avec de nombreuses applications.

- On peut expliquer cela en termes de gain/perte en moyenne à un jeu qui serait répété un très grand nombre de fois.

Cela permet de discuter sur ce qu'est un jeu équilibré

Exemple classique : lancer de dé, on gagne le montant inscrit sur le dé si le résultat est impair, sinon on perd le montant inscrit sur le dé (probabilité de gagner 1/2 mais espérance négative).

on peut construire un jeu équilibré en changeant les règles de gains et perte : on gagne 4 fois le résultat du lancer de dé s'il est impair, on perd 3 fois le résultat du lancer de dé s'il est pair.

on peut aussi inventer un jeu où la probabilité de gagner est inférieure à 1/2 mais où l'espérance de gain est positive...

- La LFGN explique aussi pourquoi les sondages donnent une estimation des vraies intentions de vote

---

Date:

**1.2. TCL et variantes.** Le **Théorème Central Limite (TCL) ou Théorème Limite Central (TLC)** porte sur la convergence en loi de  $(\sum_{k=1}^n X_k/\mathbf{a}_n)_{n \geq 1}$  vers une variable aléatoire non constante pour une certaine suite  $(\mathbf{a}_n)_{n \geq 1}$  de nombre réels positifs bien choisie et telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{a}_n = +\infty$ .

Le **TCL (standard)** assure que si les  $X_i$  sont indépendantes, de même loi, de carré intégrables et centrées (on peut se ramener au cas centré en remplaçant  $X_i$  par  $X_i - \mathbb{E}[X_i]$ ), alors

$$(S_n/\sqrt{n})_{n \geq 1} \text{ converge en loi vers une variable de loi normale centrée de variance } \mathbb{E}[X_1^2].$$

Il existe d'autres comportements en dehors du cas de carré intégrable, je reviendrai dessus très vite.

Je vais à présent évoquer des raffinements du TCL. Il en existe plusieurs comme

- le Théorème de Berry-Esseen qui estime la vitesse de convergence, (il y a plusieurs manières d'estimer la vitesse de convergence ; rappelons au passage que la convergence en loi est métrisable contrairement à la convergence presque sûre)
- des versions locales de ce théorème, sur lesquelles je reviendrai peut-être

Je souhaite vous parler à présent d'une version fonctionnelle du TCL : le **Théorème Central Limite Fonctionnel (TCLF)** (ou principe d'invariance de Strassen). Ce théorème assure la convergence en loi des trajectoires normalisées. Il s'agit ici d'étudier des processus en temps continu, c'est-à-dire des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble des fonctions qui sera soit l'espace des fonctions continues de  $[0, +\infty]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la métrique de la convergence uniforme sur tout compact, soit l'espace de Skorohod des fonctions càdlàg<sup>1</sup> qui sera aussi muni d'une métrique correspondant à une convergence sur tout compact (voir [31] pour la présentation de différentes métriques sur cet espace, rappelons que la métrique usuelle est la métrique  $J_1$ , mais qu'à défaut d'avoir la convergence dans  $J_1$ , on peut être amené à utiliser les métriques plus faibles  $M_1$  et  $M_2$ ).

Le TCLF porte sur la convergence en loi de la suite de processus càdlàg

$$\left( Y_n : t \rightarrow \mathbf{a}_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k \right)_{n \geq 1}$$

ou bien de la suite de processus continu (obtenu par linéarisation)

$$\left( Y_n : t \rightarrow \mathbf{a}_n^{-1} \left( \left( \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k \right) + \{nt\} X_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right) \right)_{n \geq 1}.$$

Un tel résultat est plus fort que le TCL qui correspond à la convergence pour un temps  $t$  donné. Souvent on le prouve en deux étapes :

- 1ère étape : en montrant la convergence en loi pour un nombre fini de temps (convergence des lois fini-dimensionnelles), i.e. la convergence de toutes les suites de variables aléatoires de la forme

$$\left( \mathbf{a}_n^{-1} (Y_n(t_1), \dots, Y_n(t_k)) \right)_{n \geq 1}$$

qui nous permet de montrer qu'il n'y a qu'une loi limite possible,

- 2ème étape : on montre une propriété de tension qui assure que la famille des lois de la suite de processus est contenue dans un compact.

Dans le cas standard évoqué précédemment (suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, de carré intégrable, centrées), le TCLF est le suivant :

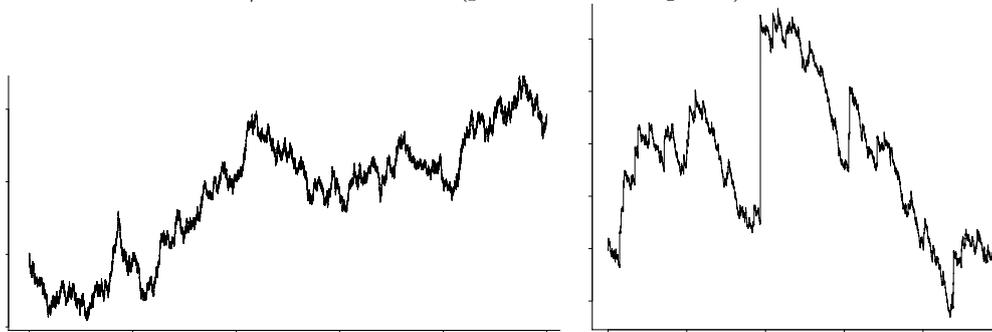
1. càdlàg signifie continu à droite et limité à gauche

- **TCLF standard**  $\left(t \mapsto n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k\right)_{n \geq 1}$  converge en loi (pour la métrique uniforme sur tout compact) vers  $(t \mapsto \|X_1\|_{L^2} \mathcal{W}_t)$  où  $\mathcal{W} : t \mapsto \mathcal{W}_t$  est un mouvement brownien (ou processus de Wiener) standard.

Au-delà du cadre des variables aléatoires de carré intégrables, il existe d'autres TCLF pour des suites  $(X_k)_{k \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et centrées. Voici quelques exemples (je parlerai ensuite des limites) :

- **(TCLF avec une normalisation non-standard)** Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \mathbb{P}(|X_1| \geq x) = A > 0$ , alors  $X_1$  n'est pas dans  $\mathbb{L}^2$  mais est dans  $\mathbb{L}^p$  pour tout  $p \in [1, 2)$  et la suite de processus  $\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k\right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $t \mathcal{W}$ , avec  $\mathcal{W}$  comme ci-dessus.
- **(Convergence vers un processus de Lévy)** Soit  $\alpha \in ]1, 2[$ . Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbb{P}(\pm X_1 \geq x) = A_\pm$  avec  $A_+ + A_- > 0$ . Alors la suite de processus  $\left(t \mapsto n^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k\right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers un processus de Lévy  $\alpha$ -stable  $\mathcal{Z}$  (la convergence a lieu dans l'espace de Skorohod des fonctions càdlàg, par rapport à la métrique  $J_1$  que nous ne détaillerons pas ici).

FIGURE 1. Une trajectoire d'un mouvement brownien et d'un processus de Lévy stable d'ordre  $\alpha = 3/2$  avec  $A_- = 0$  (pas de sauts négatifs)



1.3. **Processus limites  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{Z}$ .** Voici un bref historique sur l'introduction du Mouvement Brownien.

**Observations de déplacements chaotiques de grains ou poussières dans du liquide :**

- 17ème siècle-début 18ème : savant Anthony van Leeuwenhoek (à l'aide de ses microscopes),
- 18ème siècle : abbé John Tuberville Needham (hypothèse d'activité vitale)
- 1785 : description par le médecin botaniste chimiste Jan Ingenhousz : poussière de charbon
- 1827 : botaniste Robert Brown : pollen : énergie vitale ? non : idem avec des grains de matière inerte
- 1877 : physicien Joseph Delsaux et mathématicien Père Jésuite Ignace Carbonnelle : hypothèse de chocs incessants contre les molécules de liquide

**Modélisation :**

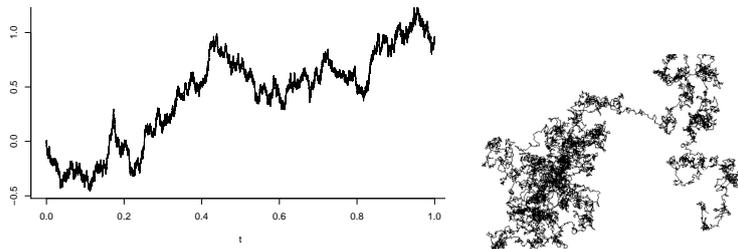
- 1900 : Louis Bachelier (thèse dirigée par Henri Poincaré) : idée de la diffusion de la probabilité et application au prix des actions
- 1905 : Albert Einstein : définition actuellement la plus utilisée de mouvement brownien
- 1923 : Norbert Wiener : construction mathématique

Un mouvement brownien standard  $\mathcal{W} = (t \mapsto \mathcal{W}_t) = (\mathcal{W}_t)_{t \geq 0}$  est un processus continu (donc une variable aléatoire à valeurs dans les fonctions continues) tel que

- $\mathcal{W}_0 = 0$ ,
- ses accroissements sont indépendants, i.e., pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tous  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ , les variables aléatoires  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  sont (mutuellement) indépendantes

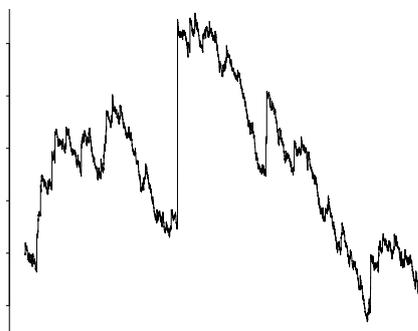
— pour tous  $s < t$ ,  $\mathcal{W}_t - \mathcal{W}_s$  est de loi gaussienne centrée de variance  $|t - s|$ , et a même loi que  $\sqrt{t - s}\mathcal{W}_1$ .

En particulier  $(\mathcal{W}_{a^2t})_t$  a même loi que  $(a\mathcal{W}_t)_t$ . On dit que ce processus est 2-stable.



Soit  $\alpha \in ]1; 2[$ . Le **processus  $\alpha$ -stable de Lévy**  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_t)_{t \geq 0}$  n'est pas continu. C'est un processus càdlàg à accroissements indépendants et tel que pour tous  $s \leq t$ ,  $\mathcal{Z}_t - \mathcal{Z}_s$  a même loi que  $|t - s|^{\frac{1}{\alpha}}\mathcal{Z}_1$ .

En particulier,  $\mathcal{Z}$  est  $\alpha$ -stable, c'est-à-dire que  $(\mathcal{Z}_{a^\alpha t})_t$  a même loi que  $(a\mathcal{Z}_t)_t$ .



## 2. THÉORÈMES LIMITES POUR DES BILLARDS CHAOTIQUES

Nous considérons une dynamique totalement déterministe donnée par l'itération d'une transformation  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ . L'évolution au cours du temps est complètement déterminée si on connaît de manière parfaite l'état initial du système. Nous allons supposer que cet état initial n'est pas parfaitement connu, qu'il n'est connu que de manière approximative, et plus précisément qu'il est choisi de manière aléatoire.

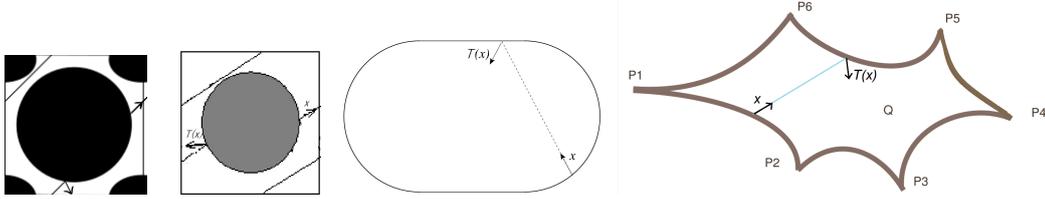
Dans la section précédente, nous considérions une dynamique tirée au sort à chaque étape. À présent nous allons considérer que la configuration est tirée au sort au départ puis est complètement déterministe.

Dans ce contexte, des théorèmes limites comme la LFGN, le TCL et le TCLF peuvent apparaître pour  $X_k = f \circ T^{k-1}$  avec  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ . Ceci peut apparaître dans des modèles de billards (modélisant le déplacement particule ponctuelle rebondissant sur le bord du domaine) :  $\Omega$  est l'ensemble des couples (position, vecteur réfléchi unitaire) à l'instant d'une réflexion et  $T$  envoie un tel couple position vitesse sur le couple position vitesse à l'instant de la collision suivante,  $T$  préserve une mesure de probabilité  $\mu$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pour ces modèles, si on tire au sort la position et la vitesse initiale de manière uniforme dans un tout petit ensemble, et si on considère  $f$  régulière (höldérienne) et centrée par rapport à la mesure  $\mu$  absolument continue par rapport à Lebesgue préservée par  $T$ , on obtient les résultats suivants :

- (a-b) Pour les deux premiers billards (qui sont tous les deux des billards de Sinai),  $((\sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} f \circ T^k / \sqrt{n})_t)_n$  converge en loi vers un mouvement brownien (TCL standard). Ceci a été montré par Bunimovich et Sinai en 1981 ; une nouvelle preuve a été donnée par Bunimovich,

FIGURE 2. (a) Billard de Sinai [27] dans le tore en horizon fini, (b) Billard de Sinai dans le tore en horizon infini, (c) billard de Bunimovich dans le stade, (d) billard avec des coins et des cusps



Chernov et Sinai en 1991 ; voir aussi le résultat de Chernov en 1999 dans le cas de l’horizon infini.

(c-d) pour le billard stade de Bunimovich et le billard avec des cusps en  $\pm x^{-2}$ ,  $((\sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} f \circ T^k / \sqrt{n \log n})_t)_n$  converge en loi vers un mouvement brownien (TCL avec une normalisation non standard). Ce résultat a été obtenu par Gouëzel et Bálint en 2006 pour le billard stade et par Bálint, Chernov et Dolgopyat en 2011 pour le billard avec un cusp ordinaire.

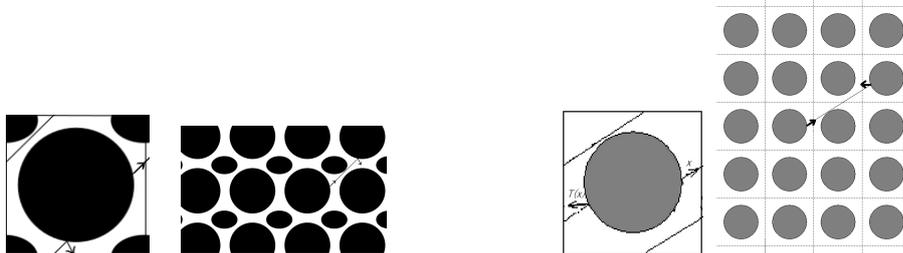
(d) pour le billard avec des cusps d’ordre supérieur en  $\pm x^{-\beta}$  avec  $\beta > 2$ ,  $((\sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} f \circ T^k / n^{\frac{1}{\alpha}})_t)_n$  converge en loi vers un processus de Lévy  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = \frac{\beta_*}{\beta_* - 1}$  où  $\beta_*$  est le maximal des ordres  $\beta$  (convergence vers une loi stable). Ce résultat a été montré par Jung et Zhang en 2018 (version fonctionnelle avec des cusps plus généraux par Jung, P, Zhang en 2019)

La variance de la loi normale limite du TCL standard dans les cas (a)-(b) ci-dessus est donnée par la somme infinie des auto-covariances (voir plus bas).

La variance de la loi normale limite du TCL non standard dans le cas (c) ci-dessus est donnée par une constante fois une moyenne de  $f$  sur l’ensemble  $(I \times \{\uparrow\}) \cup (J \times \{\downarrow\})$  où  $I$  (resp.  $J$ ) est le bord plat du bas (resp. du haut) du domaine stade.

Les constantes caractérisant la loi normale ou stable limite dans les cas (d) ci-dessus une formule s’exprimant à l’aide des moyennes de  $f$  sur chaque ensemble  $P_i \times \mathbb{S}^1$  (moyenne par rapport à une certaine mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue), où les  $P_i$  sont les lieux des cusps d’ordre maximaux.

Nous allons évoquer à présent un modèle en mesure infinie. Le billard de Sinai est lié au gaz de Lorentz  $\mathbb{Z}^2$ -périodique (introduit par Lorentz en 1905 pour modéliser le déplacement d’un électron dans un métal faiblement conducteur périodique) :



D’une part, le billard de Sinai est obtenu à partir du gaz de Lorentz  $\mathbb{Z}^2$ -périodique en prenant le quotient de la position modulo  $\mathbb{Z}^2$ .

Soit  $q_n$  la position, à l’instant de la  $n$ -ème collision, d’une particule dans le gaz de Lorentz  $\mathbb{Z}^2$ -périodique. Le déplacement  $q_n - q_0$  correspond à une somme  $\sum_{k=0}^{n-1} \kappa \circ T^k$  où  $T$  est la transformation du billard de Sinai et où  $\kappa$  est une fonction centrée à valeurs dans  $\mathbb{Z}^2$ .

- lorsque l’horizon est fini,  $\kappa$  est bornée et  $((q_{nt} - q_0)/\sqrt{n})_t$  converge en loi vers un mouvement brownien, avec une variance donnée par une somme infinie (la fonction  $\kappa$  est höldérienne au sens dynamique [5, 6])
- lorsque l’horizon est infini,  $\kappa$  n’est pas bornée, n’est pas dans  $L^2(\mu)$  vérifie  $\mu(|\kappa| > x) \sim cx^{-2}$  et  $((q_{nt} - q_0)/\sqrt{n \log n})_t$  converge en loi vers un mouvement brownien, avec une variance explicite à partir des longueurs et largeurs des corridors (cela a été montré par Szász et Varjú [30])

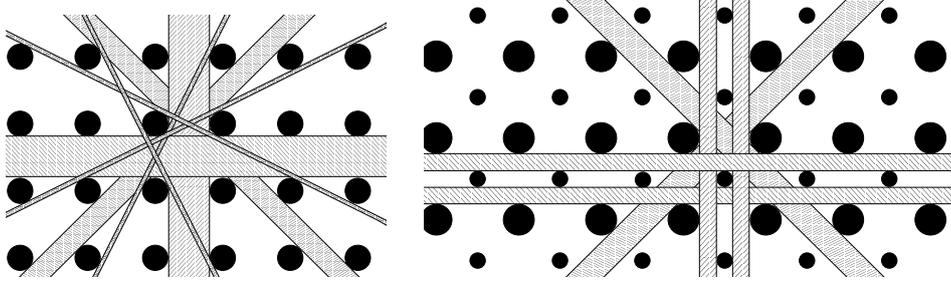


FIGURE 3. Corridors for two different periodic billiard domains (from [?])

L’étude de ces modèles billards est très technique (voir le livre de Chernov et Markarian [8]). Ce n’est pas l’objet de ce cours. L’objet de ce cours est de s’intéresser aux méthodes permettant de montrer de tels résultats, en considérant des modèles nettement plus simples pour lesquels les mêmes méthodes s’appliquent.

### 3. SYSTÈMES DYNAMIQUES ET THÉORÈMES LIMITES

**3.1. Systèmes dynamiques probabilisés.** Un système dynamique probabilisé (en temps discret) est la donnée

- d’un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ,
- et d’une transformation  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  **préservant la mesure**  $\mu$ , ce qui signifie que  $T_*\mu = \mu$ , i.e. pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  (il suffit de le vérifier pour  $k = 1$ ),  $\mu(T^{-k}(A)) = \mu(A)$  for any  $A \in \mathcal{F}$ , c’est-à-dire que  $\int_{\Omega} f \circ T^k d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$  pour toute  $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$  et tout entier  $k \geq 1$  (cette équivalence repose sur le fait que  $\mathbf{1}_A \circ T = \mathbf{1}_{T^{-1}(A)}$  combinée avec la définition/construction de l’intégrale).

**Proposition 1.** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$  un système dynamique probabilisé. Alors l’opérateur de Koopman  $U_T : f \mapsto f \circ T$  définit une isométrie de  $\mathbb{L}^p(\mu)$  pour tout  $p \in [1, +\infty]$ .*

*Démonstration.* Cela résulte du fait que

$$\forall p \in [1, +\infty[, \quad \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu), \quad \int_{\Omega} |f \circ T|^p d\mu = \int_{\Omega} |f|^p \circ T d\mu = \int_{\Omega} |f|^p d\mu,$$

en utilisant le fait que  $T$  préserve la mesure  $\mu$ . Le passage au quotient  $\mathbb{L}^p(\mu)$  résulte du fait que

$$\mu(f \circ T = g \circ T) = \mu(T^{-1}(\{f = g\})),$$

en utilisant le fait que  $T$  préserve la mesure  $\mu$ . et donc si  $f = g$   $\mu$ -presque partout, alors  $f \circ T = g \circ T$   $\mu$ -p.p (remarquons que cette implication serait vraie si au lieu de supposer  $T_*\mu = \mu$  on avait juste supposé que  $T_*\mu \ll \mu$ ).

Enfin, le résultat pour la norme infinie résulte du fait que

$$\forall M > 0, \quad \mu(|f| \circ T \leq M) = \mu(T^{-1}(\{|f| \leq M\})) = \mu(|f| \leq M).$$

□

Étant donnée une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -intégrable (appelée **observable**) vérifiant  $\int_{\Omega} f d\mu = 0$ , nous considérons les **sommes ergodiques** (aussi appelées **sommes de Birkhoff sums**) données par

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

**3.2. LFGN ?.** La loi des grands nombres n'est pas toujours vraie. Elle est liée à la notion d'**ergodicité** qui possède de nombreuses définitions équivalentes. L'une d'elle est le fait qu'une LFGN est satisfaite pour toute observable intégrable. Le système  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$  est ergodique si, pour toute observable  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -centrée,  $\left(\frac{S_n(f)}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers 0 (p.s. ou dans  $L^2$ ).

La LGN n'est pas toujours vraie, cependant les moyennes convergent.

En effet, le **théorème ergodique de von Neumann** assure que si  $L$  est un opérateur (de norme majorée par 1) agissant sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , alors, pour tout  $f \in \mathcal{H}$ ,  $(\sum_{k=0}^{n-1} L^k(f))/n$  converge vers la projection orthogonale  $\Pi(f)$  de  $f$  sur  $\ker(L - \text{Id})$ .

En appliquant ce théorème à  $L = U_T$ ,  $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mu)$ , on obtient

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{S_n(f)}{n} - \Pi(f) \right\|_{\mathbb{L}^2(\mu)} = 0,$$

où  $\Pi(f)$  est la projection orthogonale sur  $\ker(U_T - \text{Id}) = \{f \in \mathbb{L}^2(\mu) : f = f \circ T\} = \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{I}, \mu|_{\mathcal{I}})$  où  $\mathcal{I} := \{A \in \mathcal{F} : A = T^{-1}(A)\}$  est la tribu des invariants; et donc

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu), \quad \Pi(f) = \mathbb{E}_{\mu}[f|\mathcal{I}],$$

**Ainsi l'ergodicité est équivalente au fait que la tribu  $\mathcal{I}$  ne contient que des ensembles de mesure 0 ou 1.**

**L'ergodicité est aussi équivalente au fait que  $\ker(U_T - \text{Id}) = \mathbb{C} \cdot 1$ .**

Le théorème ergodique de Birkhoff renforce ce théorème en un résultat de convergence presque sûr (comme la LFGN)

$$\forall f \in \mathbb{L}^1(\mu), \quad \mu \left( \left\{ x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(f)(x)}{n} = \mathbb{E}_{\mu}[f|\mathcal{I}](x) \right\} \right) = 0,$$

Un exemple d'un système non ergodique :  $\Omega = [0, 1[$ ,  $T(x) = \{x + \frac{p}{q}\}$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ .

**3.3. Quid du TCL ?.** Soit  $f$  une observable de carré intégrable et  $\mu$ -centrée.

- Un théorème de Roland Zweimüller assure que si le système est ergodique, si on a un TCL ou un TCLF par rapport à la mesure  $\mu$ , alors ce théorème est vrai par rapport à toute mesure de probabilité absolument continue par rapport à  $\mu$ . Donc il suffit de montrer le TCL par rapport à  $\mu$ .
- Le TCL ne peut pas être vrai pour toutes les observables de carré intégrable d'un même système dynamique probabilisé (il existe des contre-exemples avec des fonctions continues donnant lieu à des comportements asymptotiques très variés). Donc il va falloir restreindre la classe des observables pour pouvoir espérer prouver un TCL.

Une étape préliminaire avant d'établir le TCL consiste à montrer que la suite des variance de  $(S_n(f)/\sqrt{n})_n$  converge vers une quantité, qu'on appellera si elle existe **variance asymptotique** et qui sera une candidate pour être la variance de la limite de  $(S_n(f)/\sqrt{n})_n$ .

Un petit calcul permet de montrer que

$$\mathbb{E}_{\mu}[(S_n(f)/\sqrt{n})^2] = \sum_{m=-n}^n \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \mathbb{E}_{\mu}[f \cdot f \circ T^m]$$

ce qui converge vers  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}_\mu[f \cdot f \circ T^m]$  si cette série est convergente.

Cas nullité de la variance asymptotique : il existe  $g \in L^2(\mu)$  tel que  $f = g - g \circ T$  dans  $L^2(\mu) \Leftrightarrow \sup_n \|S_n(f)\|_{L^2(\mu)} < \infty$  (en prenant pour  $g$  la limite faible dans  $L^2$  de  $(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n(f))_{n \geq 1}$ ).

Ceci nous amène à la notion de mélange. Les systèmes que nous allons étudier dans la suite seront mélangeants (et vérifieront des propriétés plus fortes).

Un système dynamique est dit (fortement) mélangeant si

$$\forall f, g \in L^2(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_\mu[f \cdot g \circ T^n] = \mathbb{E}_\mu[f] \mathbb{E}_\mu[g],$$

i.e.

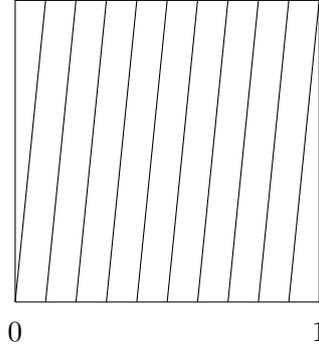
$$\forall f, g \in L^2(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Cov_\mu(f, g \circ T^n) = 0.$$

Un exemple de transformation non mélangeante :  $\Omega = [0, 1[$ ,  $T(x) = \{x + \alpha\}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En effet, for any  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f = e^{ik \cdot}$  satisfies  $f(T^m(x)) = e^{ikT^m(x)} = e^{ik(x+m\alpha)} = e^{im\alpha} e^{ikx} = e^{im\alpha} f(x)$  et donc  $\mathbb{E}_\mu[f \cdot f \circ T^k] = e^{-im\alpha}$  which does not converge.

#### 4. DES EXEMPLES SIMPLES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES

**4.1. Exemple 1 : Une application dilatante facile (modèle jouet pour le billard de Sinai).** Nous commençons par présenter une première classe d'exemples qui est directement liée à des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Il s'agit des transformations de la forme  $T : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  given by  $T(x) = px \pmod 1$  (où  $p$  est un entier  $\geq 2$ ). Cette transformation préserve la mesure de Lebesgue  $\mu$  sur  $[0, 1[$  (ceci peut se prouver par changement de variable).

FIGURE 4. Graph of the map  $T : x \mapsto 10x \pmod 1$



- Si  $f_0(x) = \lfloor px \rfloor$  (premier symbole dans l'écriture de  $x$  en base  $p$ ), alors  $(X_k := f_0 \circ T^k)_{k \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $\{0, \dots, p-1\}$  et donc vérifient la LFGN ainsi que le TCLF suivant :

$$\left( t \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \left( f_0 \circ T^k - \frac{p-1}{2} \right) \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \left( t \mapsto \left\| f_0 - \frac{p-1}{2} \right\|_{L^2} \mathcal{W}_t \right).$$

- Ce système est ergodique. On peut par exemple considérer  $f \in L^2(\mu)$  telle que  $f \circ T = f$  dans  $L^2(\mu)$ . Alors en notant  $(c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de Fourier de  $g$ , on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ik \cdot} = f = f \circ T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikp \cdot} \quad \text{dans } L^2(\mu),$$

et donc  $c_k(f) = c_{kp}(f)$  et  $c_k(f) = 0$  si  $k \notin p\mathbb{Z}$ ; et donc  $c_k(f) = 0$  pour tout  $k \neq 0$ .  
Ainsi, on a la LFGN pour toute observable intégrable :

$$\forall f \in \mathbb{L}^1(\lambda), \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu\text{-p.s.}} \int_0^1 f(x) dx.$$

— Nous allons montrer que le TCL est encore valide si pour toute fonction  $f$  höldérienne centrée

**4.2. Exemple 2 : Une application intermittente facile (modèle de Wang, modèle jouet de l'application de Manneville-Pomeau et du billard avec cusp).** Les transformations intermittentes ont été introduites pour modéliser la condensation (qui peut durer longtemps avant de disparaître). Un modèle jouet de transformations intermittentes est le modèle de Wang dans lequel il y a beaucoup d'indépendance. Ce modèle présente l'intérêt de se comporter comme des applications intermittentes (et comme les billards avec cusps) en présentant moins de difficultés techniques.

Soit  $\alpha > 1$ . Posons  $y_0 = 1$  et  $y_j = j^{-\alpha}/2$  pour tout  $j \geq 1$ . On a  $\dots < y_{j+1} < y_j < \dots < y_1 = 1/2 < y_0 = 1$ . La suite  $(y_j)_j$  est strictement décroissante de limite 0. On considère l'application  $T : ]0, 1] \rightarrow ]0, 1]$  qui définit une bijection affine croissante de  $]y_{j+1}, y_j]$  dans  $]y_j, y_{j-1}]$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ . Cette transformation préserve la mesure de probabilité  $\mu$  de densité proportionnelle à  $2\mathbf{1}_{]1/2, 1]} + \sum_{j \geq 1} \frac{j^{-\alpha}}{j^{-\alpha} - (j+1)^{-\alpha}} \mathbf{1}_{]y_{j+1}, y_j]}$ .

Description de la dynamique. De l'intervalle  $I_0 = ]y_1, y_0] = ]1/2, 1]$ , on peut atteindre tous les intervalles  $I_j = ]y_{j+1}, y_j]$ . Pour tout  $j \geq 1$ , de l'intervalle  $I_j$ , on ne peut atteindre que l'intervalle  $I_{j-1}$ , et ainsi de suite jusqu'à atteindre l'intervalle  $I_0$ .

Plus la trajectoire passe près de 0, plus elle va mettre de temps à s'échapper du voisinage de 0. Cette dynamique est moins chaotique que la multiplication par 10, mais, quitte à effectuer un changement de temps, on peut se ramener à une dynamique aussi chaotique que la multiplication par 10. Pour cela, on considère l'induction de ce système sur  $B = I_0 = ]1/2, 1]$ , i.e. regarder la dynamique au temps de passage dans cet intervalle.

transformation correspondant aux) On étudie le système induit (i.e. l'application de premier retour dans)  $]1/2, 1]$ .  $T_B : ]1/2, 1] \rightarrow ]1/2, 1]$  est l'application définissant une bijection affine croissante de  $]x_{j+1}, x_j]$  sur  $]1/2, 1]$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  en posant  $x_j = \frac{1+y_j}{2}$ . On a  $T_B(x) = T^{R_B(x)}(x)$  avec  $R_B = j + 1$  sur  $]x_{j+1}, x_j]$ .

$T_B$  définit une application dilatante, affine par morceaux sur une infinité de morceaux.

Cette application préserve la loi uniforme sur  $]1/2, 1]$ . On peut ensuite reconstruire la dynamique initiale en identifiant  $(x, l) \in ]1/2, 1] \times \mathbb{N}$  avec  $T^l(x) \in ]0, 1]$ . Cette application induite vérifie d'aussi bonnes propriétés que l'application dilatante considérée précédemment.

Étant donné une suite  $(z_j)_j$  de nombres réels, on considère la fonction  $f_0$  donnée par  $f_0(x) = z_j$  si  $x \in ]x_{j+1}, x_j]$ . Alors  $(f_0 \circ T_B^n)_n$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

En particulier la suite  $(R_B \circ T_B^n)_n$  des temps d'inter-retours est une suite de v.a. indépendantes et de même loi, de plus  $\mu(R_B > n) = \mu(]1/2, x_n]) = y_n = n^{-\alpha}/2$  et donc la suite  $(R_B^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} R_B \circ T_B^k)_n$  vérifie  $((R_B^{(n)} - n\mathbb{E}_\mu[R_B])/n^{1/\alpha})_n$  converge vers une variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable.

## 5. OPÉRATEUR DE TRANSFERT, QUASI-COMPACTITÉ ET MÉLANGE

Étant donné un système dynamique probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ , on considère l'opérateur  $U_T : f \mapsto f \circ T$  sur  $\mathbb{L}^p(\mu)$  (parfois appelé opérateur de Koopman) et l'opérateur dual de  $U_T$  (par

rapport à  $\mu$ ), noté  $P = U_T^*$ , sur  $\mathbb{L}^q(\mu)$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $p \in [1, +\infty[$  tel que

$$\forall f \in \mathbb{L}^p(\mu), \forall g \in \mathbb{L}^q(\mu), \int_{\Omega} f \circ T \times g \, d\mu = \int_{\Omega} f \times P g \, d\mu.$$

L'opérateur  $P$  est appelé opérateur de transfert, opérateur adjoint ou opérateur de Perron-Frobenius associé à  $T$ .

Exemple 1 :  $P(f)(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{x+k}{p}\right)$

Pour le système induit de l'exemple 2 :  $P_B(f)(x) = \sum_{j \geq 0} (y_j - y_{j+1}) f(x_{j+1} + (x - 1/2)(y_j - y_{j+1}))$ .

**Proposition 2.** On a  $\int_{\Omega} P f \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$  sur  $\mathbb{L}^q(\mu)$  et  $P \circ U_T = Id$  sur  $\mathbb{L}^r(\mu)$  avec  $r \in ]1, +\infty[$ . D'autre part, si  $a, b > 1$  sont tels que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$ , pour tout  $f \in \mathbb{L}^a(\mu)$  et tout  $g \in \mathbb{L}^b(\mu)$ , on a

$$P(f \times g \circ T) = (P f) \times g \quad \text{dans} \quad \mathbb{L}^{\frac{ab}{a+b}}(\mu).$$

Remarquons qu'en particulier  $P \mathbf{1} = \mathbf{1}$  et  $P(f \circ T) = f$ .

*Démonstration* Pour tout  $f \in \mathbb{L}^q(\mu)$ ,  $\int_{\Omega} P f \, d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1} \times P f \, d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1} \circ T \times f \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$ .

Pour tout  $f \in \mathbb{L}^r(\mu)$ ,  $f \circ T \in \mathbb{L}^r(\mu)$  et pour tout  $g \in \mathbb{L}^s(\mu)$  avec  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ , on a  $\int_{\Omega} P(f \circ T) \times g \, d\mu = \int_{\Omega} f \circ T \times g \circ T \, d\mu = \int_{\Omega} f \times g \, d\mu$ .

Soient  $a, b > 1$  sont tels que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$ . Considérons  $c$  tel que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ . Pour tout  $f \in \mathbb{L}^a(\mu)$  et tout  $g \in \mathbb{L}^b(\mu)$ ,  $f \times g \circ T \in \mathbb{L}^{\frac{ab}{a+b}}(\mu)$  et pour tout  $h \in \mathbb{L}^c(\mu)$ , on a  $\int_{\Omega} P(f \times g \circ T) \times h \, d\mu = \int_{\Omega} f \times g \circ T \times h \circ T \, d\mu = \int_{\Omega} P f \times g \times h \, d\mu$ . *cqfd*.

**Remark 3.** Le système  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$  est fortement mélangeant si  $\|P^n f - I(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  pour tout  $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ .

Exemple 1 : Soit  $f \in C^1([0, 1])$ . Il est facile de voir que  $\|(P f)'\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty}/p$  et donc, en itérant,  $\|(P^n f)'\|_{\infty} \leq p^{-n} \|f'\|_{\infty}$  et donc

$$\left\| P^n f - \int_{\Omega} f \, d\lambda \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{p} \left\| \left( P^n f - \int_{\Omega} f \, d\lambda \right)' \right\|_{\infty} = \frac{1}{p} \|(P^n f)'\|_{\infty} \leq p^{-n-1} \|f'\|_{\infty}.$$

Cela implique

- le mélange par densité des fonction  $C^1$ , et le mélange avec vitesse pour les fonctions  $C^1$ .  
En effet

$$|Cov_{\mu}(f, g \circ T^n)| = \left| \mathbb{E}_{\mu}[(P^n f - \int_{\Omega} f \, d\lambda)g] \right| \leq \|P^n f - \Pi(f)\|_{\infty} \|g\|_{L^1}.$$

- que  $P$  est quasicompact sur  $C^1([0, 1])$  avec unique valeur propre 1 qui est simple.

$$\|P^n(f) - \mathbb{E}_{\mu}[f] \mathbf{1}\|_{C^1} \leq p^{-n-1} \|f\|_{\infty}.$$

Méthode pour montrer la quasi-compacité : inégalité de Doeblin Fortet qui ici s'écrit  $\|P f\|_{C^1} \leq p^{-1} \|f\|_{C^1} + \|f\|_{\infty}$ , théorème de Ionescu Tulcea-Marinescu, théorème de Hennion ( $P$  compact de  $\|\cdot\|$  dans  $\|\cdot\|_0$  + inégalité de Doeblin Fortet) utilisant Gohberg-Krein et une caractérisation de Nussbaum du rayon spectral essentiel.

- la mesure de Lebesgue  $\mu$  est l'unique mesure de probabilité borélienne  $P$ -invariante.

**Construction de mesures invariantes via les opérateurs de transfert : 2 méthodes**

- On peut aussi définir l'opérateur de transfert  $Q$  par rapport à une mesure  $\mathbf{m}$  non  $T$ -invariante mais vérifiant  $T_*\mathbf{m} \ll \mathbf{m}$ . Une mesure  $\mu$  de densité  $h$  par rapport à  $\mathbf{m}$  sera  $T$ -invariante si et seulement si  $Q(h) = h$  et l'opérateur de transfert correspondant est  $P(f) = Q(gh)/h \mathbf{1}_{h \neq 0}$ .
- On peut utiliser des perturbations de  $P$  pour construire d'autres mesures invariantes. Par exemple en considérant dans l'exemple 1  $Q(f)(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \kappa_k(x) f(\frac{x+k}{p})$  avec  $\kappa_k$  lipschitzienne à valeurs dans  $]0, 1[$  telles que  $\sum_{k=0}^{p-1} \kappa_k \equiv 1$ . L'opérateur  $Q$  vérifie  $Q(f \circ g \circ T) = gQ(f)$ ,  $Q(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ . On peut montrer construire une mesure  $Q$ -invariante  $\nu$  en considérant la limite de  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(f)$ , et en déduire que  $\nu$  est préservée par  $T$ .

## 6. PERTURBATION DE FOURIER DE L'OPÉRATEUR DE TRANSFERT ET TCL

Nous présentons ici une approche basée sur la méthode de Nagaev-Guivarc'h [23, 24, 14, 15], éventuellement combinée au théorème de Keller et Liverani [21, 13].

- (1) On considère l'opérateur de transfert  $P$  de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ .
- (2) On prouve que  $P$  est **quasi-compact avec 1 unique valeur propre dominante et que cette valeur propre simple** :  $P^n(h) = \int_{\Omega} h d\mu + \mathcal{O}(e^{-an})$  in  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  pour un certain "bon" espace de Banach  $\mathcal{B}$  et un  $a > 0$ .  
On peut montrer cela pour des espaces auxiliaires (des facteurs par exemple, ou des facteurs d'extensions) comme Young l'a fait en 1998 avec ses tours et ses tours quotients.
- (3) L'espace de Banach  $\mathcal{B}$  contient  $\mathbf{1}_{\Omega}$  et  $\mathbb{E}_{\mu}[\cdot]$  est dans son dual.
- (4) Nous considérons la perturbation de Fourier  $P_t(h) = P(e^{i\langle t, \Phi \rangle} h)$  de l'opérateur  $P$  et observons que

$$\mathbb{E}_{\mu} \left[ \mathbf{1}_A e^{i\langle t, \frac{S_n(\Phi)}{a_n} \rangle} \mathbf{1}_B \circ T^n \right] = \mathbb{E}_{\mu} [\mathbf{1}_B P_{t/a_n}^n(\mathbf{1}_A)].$$

- (5) Nous utilisons un théorème de perturbation du spectre et des éléments spectraux pour montrer que  $P_t^n = \lambda_t^n \Pi_t(\cdot) + \mathcal{O}(\theta_0^n)$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  avec  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_t = 1$  dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\Pi_t - \mathbb{E}_{\mu}[\cdot] \mathbf{1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})}$  par la méthode de Nagaev-Guivarc'h (par exemple pour le billard de Sinai en horizon fini) ou  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\Pi_t - \mathbb{E}_{\mu}[\cdot] \mathbf{1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, L^1(\mu))}$  par la méthode de Nagaev-Guivarc'h combinée au théorème de Keller Liverani (par exemple pour le billard de Sinai en horizon infini quand  $\Phi = \kappa$ ) et nous concluons que

$$\mathbb{E}_{\mu} \left[ \mathbf{1}_A e^{i\langle t, \frac{S_n(\Phi)}{a_n} \rangle} \mathbf{1}_B \circ T^n \right] \approx \lambda_{t/a_n}^n \mathbb{E}_{\mu} \left[ \mathbf{1}_B \Pi_{t/a_n}(\mathbf{1}_A) \right] \sim \lambda_{t/a_n}^n \mu(B) \mu(A).$$

- (6) Si  $\lambda_u \sim_{u \rightarrow 0} e^{-\frac{|\Sigma u|_2^2}{2}}$ , alors  $\lambda_{t/\sqrt{n}}^n \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{|\Sigma t|_2^2}{2}}$  et donc  $\left( \frac{S_n(\Phi)}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $\Sigma W$  (cela s'applique par exemple au billard de Sinai quand  $\Phi$  est hœldérienne, ou au billard de Sinai en horizon fini quand  $\Phi = \kappa$ ).
- (7) Si  $\lambda_u \sim_{u \rightarrow 0} e^{-|\Sigma u|_2^2 \log(|u|_2)}$ , alors  $\lambda_{t/\sqrt{n \log(n)}}^n \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{|\Sigma t|_2^2}{2}}$  and so  $\left( \frac{S_n(\Phi)}{\sqrt{n \log(n)}} \right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $\Sigma W$  (billard de Sinai en horizon infini quand  $\Phi = \kappa$ ).
- (8) Preuve du théorème limite local avec mélange à l'aide du point (4) ci-dessus (combiné à un argument de non-arithméticité permettant le contrôle de  $P_t$  quand  $t$  est en dehors d'un

voisinage de 0) dans le cas où  $\lambda_{t/a_n}^n \sim e^{-\frac{|\Sigma t|_2^2}{2}}$  :

$$\begin{aligned} \mu(A \cap \{S_n(\Phi) = 0\} \cap T^{-n}(B)) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[-\pi, \pi]^2} \mathbb{E}_\mu \left[ \mathbf{1}_A e^{i\langle u, S_n(\Phi) \rangle} \mathbf{1}_B \circ T^n \right] du \\ &= \frac{1}{(2\pi a_n)^2} \int_{[-\pi a_n, \pi a_n]^2} \mathbb{E}_\mu \left[ \mathbf{1}_A e^{i\langle \frac{t}{a_n}, S_n(\Phi) \rangle} \mathbf{1}_B \circ T^n \right] dt \approx \frac{\mu(A)\mu(B)}{(2\pi a_n)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_{t/a_n}^n dt \\ &\approx \frac{\mu(A)\mu(B)}{(2\pi a_n)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|\Sigma t|_2^2}{2}} dt \approx \frac{\mu(A)\mu(B)}{\sqrt{2\pi \det(\Sigma)} a_n^2} = \frac{c_0}{a_n^2} \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

## 7. TCL PAR LA MÉTHODE DES MARTINGALES

L'idée remonte à Gordin. Elle consiste à montrer que  $f = g + h - h \circ T$  avec  $(S_n(g)/\sqrt{n})_n$  vérifiant un TCL. On conclura que  $(S_n(f)/\sqrt{n})_n$  vérifie le même TCL, par le lemme de Slutsky, en remarquant que

$$S_n(f) = S_n(g) + h - h \circ T^n$$

et que  $((h - h \circ T^n)/\sqrt{n})_n$  converge en probabilité vers 0.

Pour montrer que  $(S_n(g)/\sqrt{n})_n$  vérifie un TCL, une stratégie consiste à avoir  $Pg = 0$ , ce qui impliquera que  $(g \circ T^k)_k$  est une suite de différence de martingale renversée et d'utiliser des théorèmes limites valides pour de telles suites (voir le polycopié de Conze et Raugi[10]).

Dans les bons cas (système non-inversible+ hypothèses sur l'opérateur  $P$ ),  $g$  et  $h$  s'obtiennent comme suit

$$g = g_0 - (Pg_0) \circ T, \quad g_0 = \sum_{k \geq 0} P^k f, \quad h = \sum_{k \geq 1} P^k f.$$

Il existe une variante de ceci quand le système est inversible.

Pour plus de détails sur ces méthodes (sur des exemples simples), on pourra consulter mon livre paru dans les cours spécialisés de la SMF (numéro 30).

## RÉFÉRENCES

- [1] P. Bálint, N. Chernov, D. Dolgopyat, Limit theorems for dispersing billiards with cusps, *Comm. Math. Phys.* 308, No. 2, 479–510, 2011.
- [2] P. Bálint and S. Gouëzel, Limit theorems in the stadium billiard, *Comm. Math. Phys.* 263, 451–512, 2006.
- [3] E. Bolthausen, A central limit theorem for two-dimensional random walks in random sceneries, *Ann. Probab.* 17, No. 1, 108–115, 1989.
- [4] L. Bunimovich, On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Commun. Math. Phys.* 65, 295–312, 1979.
- [5] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Commun. Math. Phys.* 78 479–497, 1981.
- [6] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, N. I. Chernov, Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards. *Russian Math. Surveys* 46, 47–106, 1991. (Translation from *Usp. Mat. Nauk* 46, 43–92, 1991.
- [7] N. Chernov, Decay of correlations and dispersing billiards. *J. Statist. Phys.* 94, 513–556, 1999.
- [8] N. Chernov, R. Markarian, *Chaotic billiards*, Mathematical Surveys and Monographs 127. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), xii, 316 p., 2006.
- [9] J.-P. Conze, On a two-dimensional recurrence criterion for stationary walks, applications. (Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires, applications.) (French), *Ergodic Theory Dyn. Syst.* 19, No. 5, 1233–1245, 1999.
- [10] J.-P. Conze, A. Raugi, *Martingales, chaînes de Markov, systèmes dynamique*, polycopié disponible sur la page web de Jean-Pierre-Conze.
- [11] D. Dolgopyat, D. Szász, T. Varjú, Recurrence properties of planar Lorentz process, *Duke Math. J.* 142, No. 2, 241–281, 2008.

- [12] A. Dvoretzky, P. Erdős, Some problems on random walk in space. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31 - August 12, 353–367, 1951.
- [13] D. Ferré, Théorème de Keller-Liverani et forte ergodicité, preprint (2010).
- [14] Y. Guivarc’h. Application d’un théorème limite local à la transience et à la récurrence de marches de Markov. Théorie du potentiel, Lecture Notes in Math., 1096, Springer, 301–332 (1984).
- [15] Y. Guivarc’h, J. Hardy. Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d’Anosov. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24, p. 73–98 (1988).
- [16] H. Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens. Proc. Amer. Math. Soc. 118 , 627–634 (1993).
- [17] H. Hennion and L. Hervé, Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness, Lecture Notes in Math., vol. 1766, Springer, 2001.
- [18] P. Jung, I. Melbourne, F. Pène, P. Varandas, H.-K. Zhang, Necessary and sufficient condition for M2-convergence to a Lévy process for billiards with cusps at flat points, Stochastics and Dynamics, to appear.
- [19] P. Jung, H.-K. Zhang, Stable laws for chaotic billiards with cusps at flat points, Ann. Henri Poincaré, 19, 3815–3853, 2018.
- [20] P. Jung, F. Pène, H.-K. Zhang, Convergence to  $\alpha$ -stable Lévy motion for chaotic billiards with cusps at flat points, Nonlinearity, 33 , No 2, 807–839, 2019.
- [21] G. Keller, C. Liverani, Stability of the spectrum for transfer operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 28 (1999), p. 141–152.
- [22] I. Melbourne, P. Varandas, Convergence to a Lévy process in the Skorohod M1 and M2 topologies for nonuniformly hyperbolic systems, including billiards with cusps Comm. Math. Phys., 1–26, 2019 .
- [23] S. V. Nagaev. Some limit theorems for stationary Markov chains. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2, 389–416 (1957).
- [24] S. V. Nagaev.. More exact limit theorems for homogeneous Markov chains”, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 6,67–86 (1961).
- [25] F. Pène, Stochastic properties of dynamical systems, Cours spécialisés de la Société Mathématique de France (SMF), Volume 30, xxii, 249 p. (2022).
- [26] F. Pène, Planar Lorentz process in a random scenery, Ann. IHP, Probabilités et Statistiques, 45, No 3, 818–839, 2009.
- [27] Ya. G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards, Russ. Math. Surv. 25, 137–189, 1970.
- [28] K. Schmidt, On joint recurrence, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 327, No. 9, 837–842, 1998.
- [29] D. Szász, T. Varjú, Local limit theorem for the Lorentz process and its recurrence in the plane, Ergodic Theory Dyn. Syst. 24, No. 1, 257–278, 2004.
- [30] D. Szász, T. Varjú, Limit laws and recurrence for the planar Lorentz process with infinite horizon, J. Stat. Phys. 129, No. 1, 59–80, 2007.
- [31] W. Whitt, Stochastic-process limits. An introduction to stochastic-process limits and their application to queues, Springer Series in Operations Research. New York, NY : Springer. xxiii, 602 p., 2002.
- [32] L.-S. Young, Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity, Ann. Math. 147 ,585–650, 1998.
- [33] R. Zweimüller, Mixing limit theorems for ergodic transformations, Journal of Theoretical Probability 20, 1059–1071, 2007.