Sujet de Stage de M2

Introduction au contrôle des EDP et au contrôle Mobile

Encadrants:	**Bernhard Haak** bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr **Philippe Jaming** philippe.jaming@math.u-bordeaux.fr
Lieu du stage:	Institut de Mathématiques de Bordeaux 351 cours de la libération 33405 Talence

Langue:	Franąis ou anglais
Durée:	4 à 5 mois entre fin février et fin juillet 2025
Indémnité de stage:	669 euros/mois
Poursuite possible en thèse:	oui (financement ANR CHAT acquis) https://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/Chat/
Candidature:	CV + relevés de notes et liste des cours suivis en M2 envoyé aux 2 encadrants **avant le 23/02/2025**

English version below.

Prérequis: Ce sujet ne demande pas de prérequis particulier en-dehors du fait d'avoir suivi un parcours de M2 à dominante "analyse". Une connaissance d'un ou plusieurs des domaines suivants serait appréciable: analyse harmonique, analyse complexe, analyse fonctionnelle, contrôle des EDP, aspects théoriques des EDPs.

Dans ce stage on considère un système gouverné par une EDP telle que l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (éventuellement $\Omega = \mathbb{R}^d$), Ω dont le bord est régulier. La solution vérifiera une condition au bord sur $\partial\Omega$ de type Dirichlet ou Neumann. On agit sur cette équation via un terme de source qui va être supporté dans un ouvert $\omega \subset \Omega$ qu'on souhaite aussi petit que possible. Pour fixer les idées, on peut par exemple considérer le système suivant:

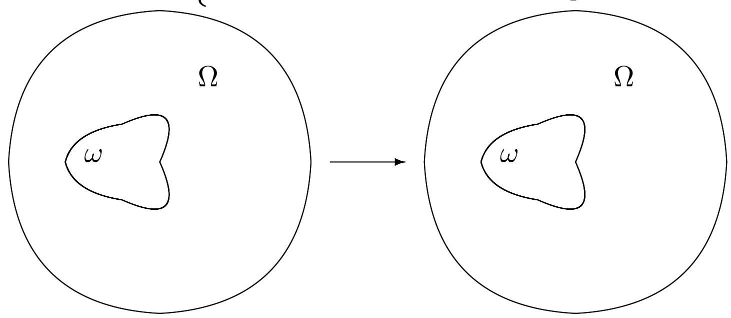
L'objectif est que, quel que soit u_0, on puisse trouver f tel qu'après un temps $T > 0$, on ait $u(T, x) = 0$ (controlabilité à zéro) ou mieux: quels que soient u_0 et u_1, on puisse trouver f tel que $u(T, x) = u_1(x)$ (controllabilité).

D'autres questions se posent, existe-t-il un temps minimal pour qu'on ait controllabilité, ou ce temps peut-il être arbitrairement petit? Quels sont les conditions géométriques (optimales si possible) sur l'ouvert ω pour avoir controllabilité? Quels sont les états qu'on peut atteindre? Peut-on atteindre approximativement n'importe quel état?...

Un certains nombre de ces questions s'étudient mieux sur une propriété duale qu'on appelle l'inégalité d'observabilité dans laquelle apparaît une constante qui représente le coût du contrôle. On veut évidemment que ce coût soit aussi petit que possible. Peut-on estimer ce coût?

Le premier objectif de ce stage est de comprendre les liens entre ces différentes notions et ainsi d'acquérir les bases de théorie du contrôle.

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta_x)u(x,t) = \mathbf{1}_\omega(x) f(x,t) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$



État initial $u(t=0,x) = u_0(x)$ État final $u(t=T,x) = u_1(x)$

Le second objectif serait de comprendre les démonstrations de contrôlabilité de certaines équations classiques (ondes, chaleur) sur des ouverts dont la géométrie est assez simple (par exemple une boule).

Enfin, 3 directions sont envisagées dans ce stage et dans la poursuite éventuelle en thèse:

- Le cas de $\mathbb{R}^d$ (voire des ouverts non-bornés) sur lesquels certaines de ces questions sont encore ouvertes.
- Le cas du contrôle mobile, c'est-à-dire quand le petit ouvert ω n'est plus fixe mais dépend lui aussi du temps. L'objectif ici est d'obtenir des conditions géométriques moins restrictives (on envisage même que $\omega(t)$ ne soit plus un ouvert, mais par exemple une courbe quand $\Omega \subset \mathbb{R}^2$).
- Enfin le cas où on agit sur le système non plus par un terme de source, mais directement sur la géométrie du système, c'est-à-dire quand Ω est remplacé par un ouvert $\Omega(t)$ qui dépend du temps de façon contrôlée. Par exemple, $\Omega(t)$ est une boule dont on contrôle le rayon $R(t)$ ou un cylindre dont on contrôle la hauteur $h(t)$. Peut-on ainsi ramener tout état initial u_0 à 0 ?

Stage de M2

Introduction to control of PDEs and to mobile control

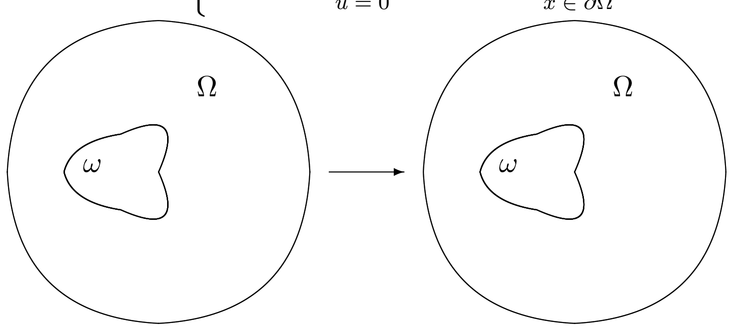
Supervisors:	**Bernhard Haak**
	`bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr`
	Philippe Jaming
	`philippe.jaming@math.u-bordeaux.fr`

Place:	Institut de Mathématiques de Bordeaux 351 cours de la libération 33405 Talence (Bordeaux, France)
Language:	English or French
Duration:	4 to 5 month from march to end of July
Indémnité de stage	669 euros/ month
Possibility of PhD	yes (scholarship via ANR project CHAT) https://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/Chat/
Candidature:	CV + marks and list of second year master courses followed send to both supervisors **before 23/02/2025**

Prerequisite: This project does not require any specific prerequisite outside a solid background in analysis at master level. Some adavanced knowledge in one or several of the following fields is highly appreciated: harmonic analysis, complex analysis, functional analysis, control theory (or other aspects of theoretical PDEs).

In this project, we consider a system governed by a PDE like the heat equation or the wave equation on an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (possibly $\Omega = \mathbb{R}^d$), that has a smooth boundary on which the solution of the PDE satisfies some boundary condition. We act on the system via a source term that is supported in a small open set $\omega \subset \Omega$ (as small as possible). For instance, we may consider the following system:

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta_x)u(x,t) = \mathbf{1}_\omega(x) f(x,t) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$



Initial state $u(t=0,x) = u_0(x)$ Final state $u(t=T,x) = u_1(x)$

The objective is that, what ever the intial state, one may find a source f that steers the solution, after some time $T > 0$, to an equilibrium $u(T, x) = 0$ (null-controlability) or better, to a freely prescribed state u_1 we want,*i.e.* $u(T, x) = u_1(x)$ (controllability).

Further questions may be asked. Is there a minimal time for controllability or can it be done in arbitrarily small time? What are the optimal geometric conditions on ω for those properties? If controllability is not available, describe the states that can be reached and those than can be approximatively reached?

Some of those questions are best understood by a duality argument in a so-called observability inequality. There is a constant appearing in such an inequality that is considered as the "cost" of the control and that one wants to be as small as possible. Can one compute this constant?

The first objective of the project is to understand those notions and how they interlace, thus acquiring bases of control theory.

The second aim is to understand some proofs of controllability of classical differential equations (wave, heat,..) at least when the geometry of Ω is relatively simple (e.g. a ball)

Three directions shall be followed towards the last part of the project and lead eventually to a PhD subject:

- The case of $\mathbb{R}^d$ (eventually other unbounded open sets) which is still open for several families of equations.
- Mobile control: here the set ω is no longer fixed but allowed to move with time. The aim is of course that at fixed time, this set is much smaller than in the fixed case and possibly ω could even have empty interior (e.g. a curve when $\Omega \subset \mathbb{R}^2$).
- Finally, one may also act on the system by acting directly on the set Ω which is now allowed to depend on time $\Omega(t)$. The aim is now to see if it is possible to steer the system to the nul state $u(T, x) = 0$ after some time T by deforming Ω (no source term may be required). For instance, $\Omega(t)$ could be a ball with a radius $R(t)$ to be constructed or a cylinder of which the height $h(t)$ is used to control the equation.